# Исследование конформной инвариантности минимальных деформаций N=4 SYM

Александр Жибоедов

*МГУ,*

*ЛТФ ОИЯИ*

# Введение. Мотивация исследования.

СМ: $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$

При энергиях порядка $\Lambda_{QCD}$ КХД находится в сильной связи

метод теории возмущений оказывается неприменимым

- вычисления на решетке

- идея значительного упрощения модели в пределе большого числа цветов

$$SU(3)\to SU(N),\ N\to\infty$$

+ теория возмущений по $O(\frac{1}{N})$

# Соответствие между калибровочными теориями и теориями струн

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{N}=4$ СЯМ, любые $N, g_{YM}$<br>$g_{YM}^2 = g_s$ | $\Longleftrightarrow$ | Квантовая теория струн<br>типа IIб в пространстве $AdS_5 \times S_5$<br>$R^4 = 4\pi g_s N \alpha^2$ |
| Планарный предел $\mathcal{N}=4$ СЯМ<br>$\lambda = g_{YM}^2 N$ фиксировано, $N \to \infty$<br>$\frac{1}{N^2}$-разложение | $\Longleftrightarrow$ | Классическая теория струн<br>типа IIб в пространстве $AdS_5 \times S_5$<br>$g_s$ разложение по струнным петлям |
| Планарный предел $\mathcal{N}=4$ СЯМ $\lambda \gg 1$<br>$\lambda^{-1/2}$ разложение | $\Longleftrightarrow$ | Классическая супергравитация типа IIб<br>разложение по $\alpha$ |

$$\lambda = g_{YM}^2 \cdot N >> 1$$

$$g_{YM} \to 0 \quad N \to \infty$$

M hep-th/9711200

GKP hep-th/9802109

W hep-th/9803131

$$\left\langle \exp\left(i\int d^4x\, J(x) O(x)\right)\right\rangle = \exp\left\{- S_{SuGra\,IIb}\left(\Phi\,(x,z)\big|_{z\to 0} = J(x)\right)\right\}$$

$R^{1,3}$

$AdS_5 \times S_5$

# Полная деформация Лея-Штрасслера.

LS hep-th/9503121

$$S_{SYM}^{N=4} = \int d^8z\, Tr\left(\mathrm{e}^{-gV}\,\overline{\Phi}_i\,\mathrm{e}^{gV}\,\Phi^i\right) + \frac{1}{2g^2}\int d^6z\, Tr\left(W^\alpha W_\alpha\right) +$$

$$+\, ig\int d^6z\, Tr\left(\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \Phi_1\Phi_3\Phi_2\right) + h.c.$$

$$S_{LS}^{N=1} = \int d^8z\, Tr\left(\mathrm{e}^{-gV}\,\overline{\Phi}_i\,\mathrm{e}^{gV}\,\Phi^i\right) + \frac{1}{2g^2}\int d^6z\, Tr\left(W^\alpha W_\alpha\right) +$$

Добавка

$$+\, ih\int d^6z\, Tr\left(q\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \frac{1}{q}\Phi_1\Phi_3\Phi_2\right) + \frac{i\rho}{3}\sum_{i=1}^{3}\int d^6z Tr(\Phi_i^3) + h.c.$$

Lunin, Maldacena hep-th/0502086

Zanon et al.

Sokatchev et al.

KB hep-th/0706.4245

Kulaxizi hep-th/0612160

Является ли теория конформной на квантовом уровне?

# Симметрии β-деформированной теории и полной деформации ЛШ

**β-деформированная**

1. R-симметрия.

$$SU(4)_R \to U(1)_R$$

2. $U(1) \times U(1)$ глобальная

3. $Z_3$ циклические перест-ки

4. $$\Phi_i \leftrightarrow \Phi_j \qquad i \neq j$$
$$q \leftrightarrow -\frac{1}{q}$$

**ЛШ-деформированная**

1. R-симметрия.

$$SU(4)_R \to U(1)_R$$

2. $Z_3$ глобальная

3. $Z_3$ циклические перест-ки

4. $$\Phi_i \leftrightarrow \Phi_j \qquad i \neq j$$
$$q \leftrightarrow -\frac{1}{q}$$

# Свойства , необходимые для конформности теории на квантовом уровне.

NSVZ 83

$$\beta_g = g^2 \frac{\sum T(R) - 3C(G) + \sum T(R)\gamma_{\Phi_i}(R)}{1 - 2gC(G)}$$

$$\sum T(R) - 3C(G) = 0$$

$$\gamma_{\Phi_i} = 0$$

Порядок за порядком в ТВ

$$\gamma(g,h,q,\rho) = 0$$

$$\beta_h = 0$$

$$\beta_g = 0$$

Топология диаграмм и структура вершин *одинакова в ЛШ теории и в N=4 СЯМ*. Таким образом, мы интересуемся разностью между двумя теориями

Заметим, что *конформная инвариантность=конечность* может быть достигнута с помощью двойного разложения констант связи.

Kazakov '85

$$h = h(g,\varepsilon)$$

$$\rho = \rho(g,\varepsilon)$$

KB hep-th/0706.4245

# Обозначения. Однопетлевое условие.

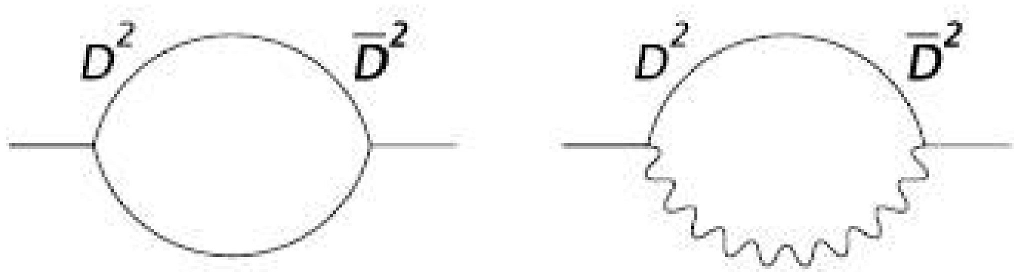
Введем след.
обозначения

$$h \cdot q = h_1 \qquad \frac{h}{q} = h_2 \qquad \rho = h_3$$

$$\langle \Phi_i \bar{\Phi}_i \rangle \Rightarrow$$

$$Z_2^{-1} = 1 + \frac{c_{11}}{\varepsilon} + \left(\frac{c_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{c_{21}}{\varepsilon}\right) + \left(\frac{c_{33}}{\varepsilon^3} + \frac{c_{32}}{\varepsilon^2} + \frac{c_{31}}{\varepsilon}\right) + \ldots$$

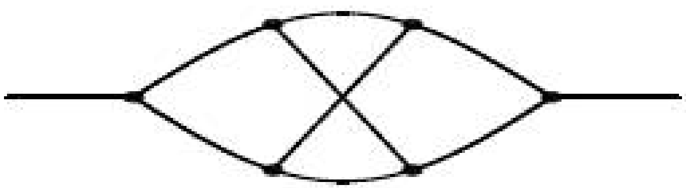
$$\gamma = c_{11} + 2c_{21} + 3c_{31} + \ldots$$




Zanon et al. '06

$$f_{ik} h_i \bar{h}_k = |h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 - \frac{2}{N^2}|h_1 - h_2|^2 - \frac{4}{N^2}|h_3|^2 = 2g^2$$

# Трехпетлевое условие в непланарном пределе



BKVZ hep-th/0712.4132

$$\sim\left[(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 - \frac{2}{N^2}|h_1 - h_2|^2 - \frac{4}{N^2}|h_3|^2) - 2g^2\right]P_{31}(g, h_i, N) +$$

$$+ |h_1 - h_2|^2 (N^2 |h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2|^2 - 9N^2 |h_1|^2 |h_2|^2 + 5|h_1 - h_2|^4) -$$
$$- 18|h_3|^2 ((N^2 - 5)|h_1^2 + h_2^2|^2 - (N^2 - 10)(\bar{h}_1 \bar{h}_2 (h_1^2 + h_2^2) + c.c) - 20|h_1|^2 |h_2|^2) +$$
$$+ (\bar{h}_3 (h_1 - h_2)((N^2 + 20)(h_1^2 + h_2^2) + 10(N^2 - 4)h_1 h_2) + c.c) - 8(N^2 - 10)(|\rho|^2)^3$$

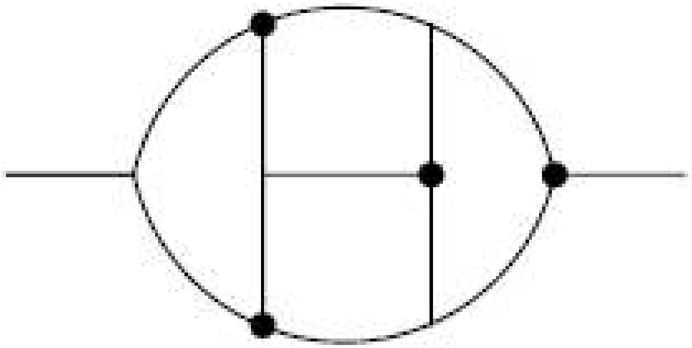
$$\hat{G}_{31} = -\frac{N^2 - 4}{2^6 N^6}\frac{3\zeta_3 \cdot}{(4\pi)^6} \quad \boxed{1l}$$

Условие конечности и конформности

$$f_{ik} h_i \bar{h}_k = 2g^2 + \frac{\hat{G}_{31}}{6(4\pi)^6} g^2 \varepsilon^2 + \frac{\hat{G}_{31}}{3(4\pi)^4} g^4 \varepsilon - \frac{3\hat{G}_{31}}{(4\pi)^2} g^6 + \ldots$$

# Четырехпетлевое условие в планарном пределе

BKVZ hep-th/0712.4132



$$\sim (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2)^4 - (2g^2)^4 +$$

$$+ (|h_1|^2 - |h_2|^2)^4 + (|h_3|^2)^4 - 4|h_3|^2(|h_1|^2 + |h_2|^2)^3 + 6(|h_3|^2)^2(|h_1|^2 + |h_2|^2)^2 -$$
$$- 4(|h_3|^2)^3(|h_1|^2 + |h_2|^2) + 24|h_1|^2|h_2|^2|h_3|^2(|h_1|^2 + |h_2|^2) + 8h_3^3(|h_2|^2\bar{h}_1^3 - |h_1|^2\bar{h}_2^3) +$$
$$+ 8\bar{h}_3^3(|h_2|^2 h_1^3 - |h_1|^2 h_2^3) - 8|h_3|^2(h_2^3\bar{h}_1^3 + h_1^3\bar{h}_2^3)$$

$$\hat{G}_{41} = \frac{5\varsigma_5 N^4 \cdot \boxed{1l}}{2g^8(4\pi)^8}$$

Условие конечности и конформности

$$|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 = g^2\Big[2 + \frac{5}{18}\varsigma_5\hat{G}_{41}\varepsilon^3 + \frac{5}{3}\varsigma_5\hat{G}_{41}\Big(\frac{g^2N}{16\pi^2}\Big)\varepsilon^2 +$$
$$+ 5\varsigma_5\hat{G}_{41}\Big(\frac{g^2N}{16\pi^2}\Big)^2\varepsilon + 10\varsigma_5\hat{G}_{41}\Big(\frac{g^2N}{16\pi^2}\Big)^3 + \ldots\Big]$$

# Унитарно эквивалентные решения в пространстве параметров

$$\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\end{pmatrix}$$

$$UU^+ = 1$$

$$\boxed{W_\beta = ih\int d^6z\, Tr\left(q\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \frac{1}{q}\Phi_1\Phi_3\Phi_2\right)}$$

$$\widetilde{W}_\beta = i\int d^6z\, Tr\left(\tilde{h}_1\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \tilde{h}_2\Phi_1\Phi_3\Phi_2\right) + i\frac{\tilde{h}_3}{3}\int d^6z \sum_{i=1}^{3}\Phi_i^3$$

$$\begin{cases}\tilde{h}_1 = -a + ib\\ \tilde{h}_2 = a + ib\\ \tilde{h}_3 = 2a\end{cases}$$

$$\begin{cases}a = \pm\dfrac{h}{2\sqrt{3}}\left(q - \dfrac{1}{q}\right)\\ b = \pm\dfrac{h}{2}\left(q + \dfrac{1}{q}\right)\\ b^2 = 1 + 3a^2\end{cases}$$

В частности $|q| = 1 \quad |h|^2 = g^2$

является точно суперконформной в планарном пределе

Таким образом, мы проделали нетривиальную проверку наших вычислений и получили полное согласие.

# В поисках новых решений в пространстве параметров

$$\begin{cases} \frac{h_1}{g} = e^{i\pi\alpha} \\ \frac{h_2}{g} = 0 \\ \frac{h_3}{g} = 1 \end{cases}$$

$$W_\beta = ih\int d^6z\, Tr\left( q\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \frac{1}{q}\Phi_1\Phi_3\Phi_2 \right)$$

Точно конформна в планарном пределе!!!

Zanon et al. hep-th/0507282

$$\Uparrow \quad q = e^{\frac{i\pi m}{3}}$$

$$\alpha \neq \frac{2m}{3}$$

$$W_{LS^*} = ih\int d^6z \left[ qTr(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{3}\frac{\Phi_i^3}{3} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{h_1}{g} = 0 \\ \frac{h_2}{g} = -e^{i\pi\alpha} \\ \frac{h_3}{g} = 1 \end{cases}$$

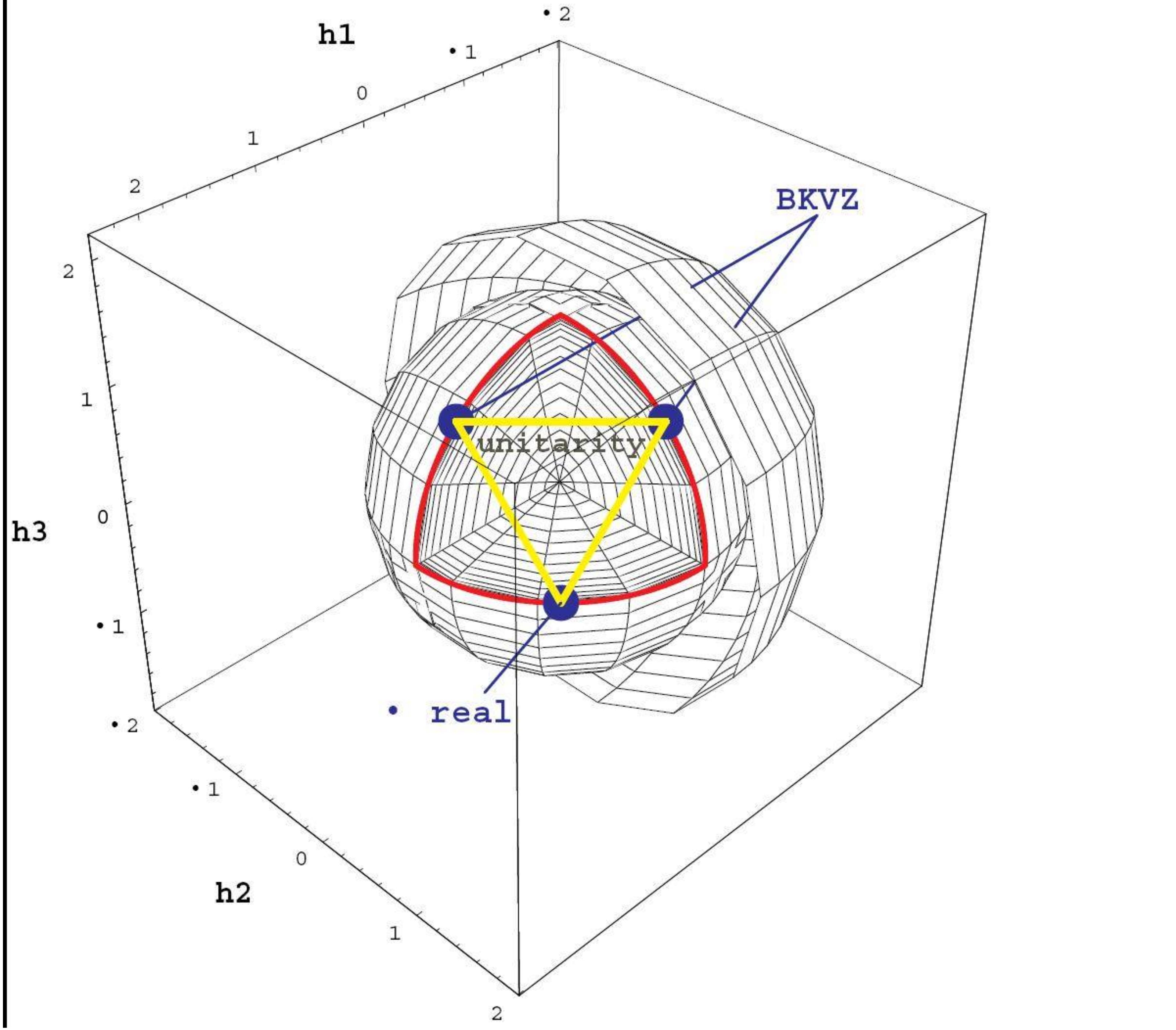
$$\Downarrow \quad q = \pm i$$

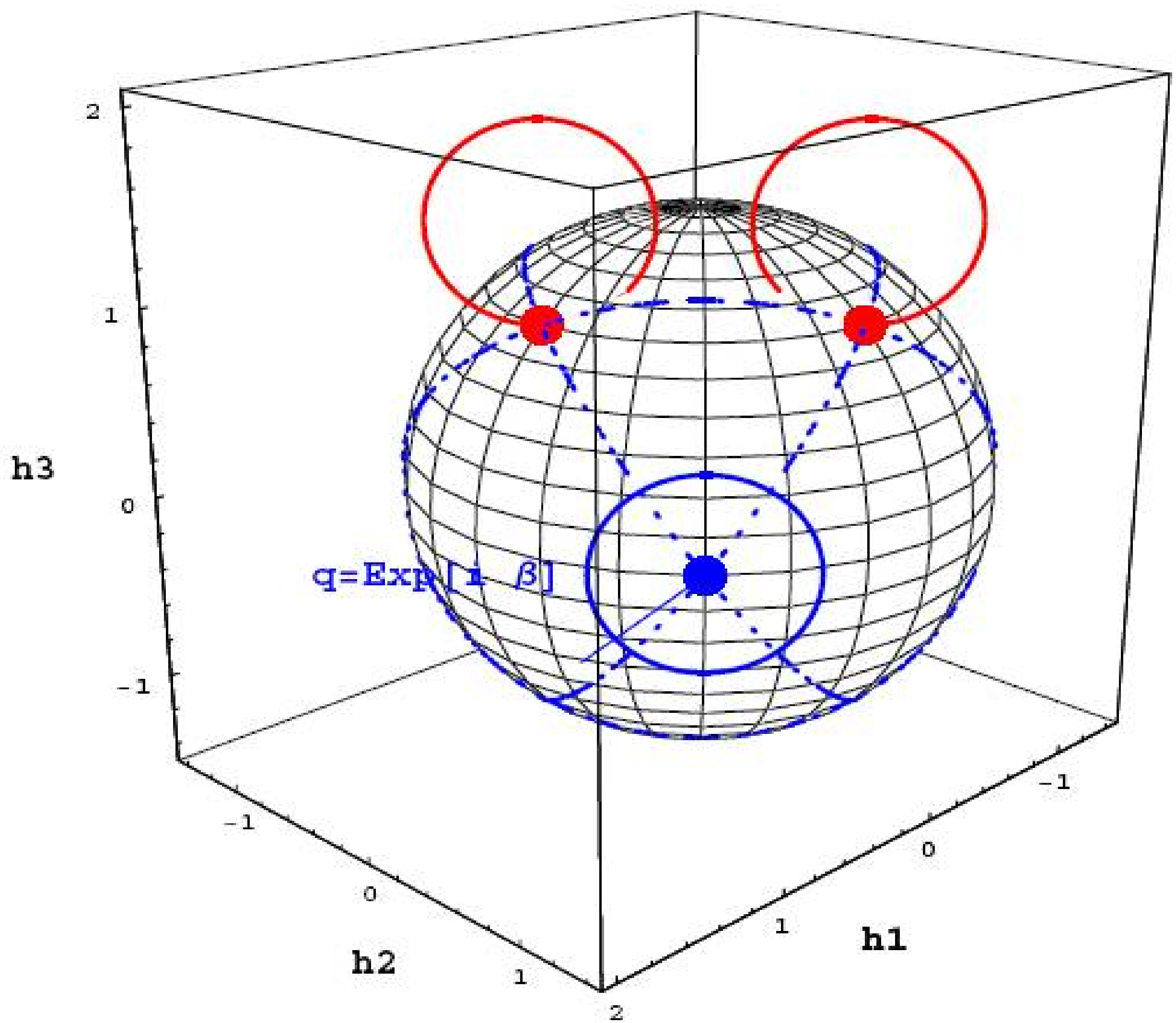
Точно конформна в планарном пределе???

BKVZ hep-th/0712.4132

$$\begin{cases} \frac{h_1}{g} = \pm\frac{1}{2} - i\pm\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{h_2}{g} = \pm\frac{1}{2} + i\pm\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{h_3}{g} = -\pm\frac{2i}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$|q| = 1 \qquad |h|^2 = g^2$$


h1
h2
h3
BKVZ
unitarity
• real
2
1
0
1
2
2
1
0
1
2
2
1
0
1
2



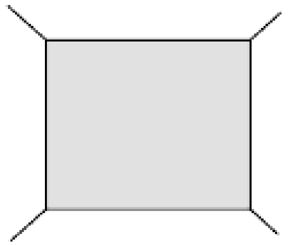
h3
2
1
0
−1
h2
−1
0
1
2
h1
−1
0
1
q=Exp[i β]

# Конформная инвариантность в высших порядках теории возмущений

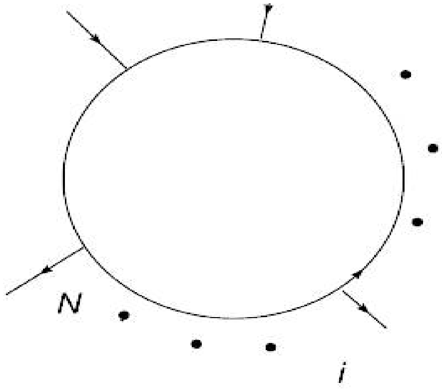
$$|h_1|^{2l}|h_3|^{2n}\left[(h_1\bar{h}_3)^{3k}+(h_3\bar{h}_1)^{3k}\right]$$

- Поправка к киральному пропагатору

- Квадраты, зависящие от фазы, подавлены в планарном пределе

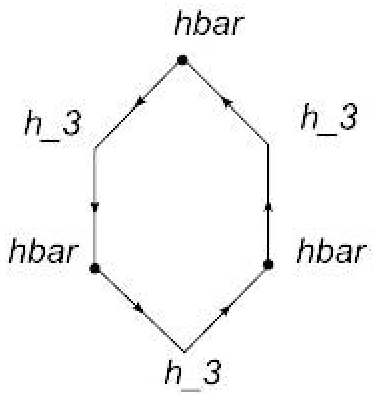


- Потенциальная зависимость от фазы должна быть заключена в более сложных топологических структурах

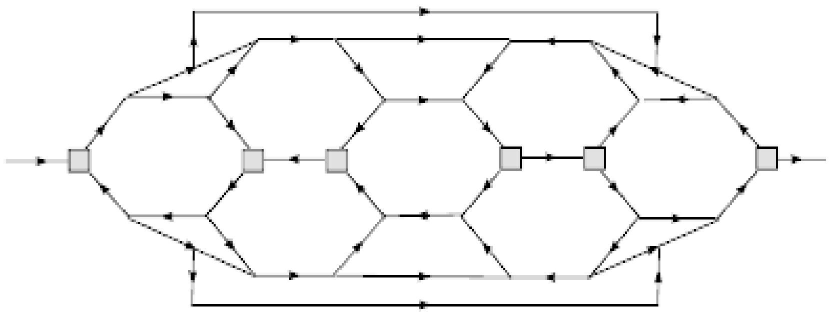


# Конформная инвариантность в высших порядках теории возмущений

Ослабляя какое-либо из требований, можно получить границу снизу на минимальное число петель, раньше которого зависимость от фазы появиться не может




Минимальная структура, зависящая от фазы, и не подавленная в планарном пределе



Пример минимальной диаграммы с ослаблением одного из условий (15 петель)

# Заключение

• Найдены условия конформной инвариантности и конечности полной деформации Лея-Штрасслера N=4 СЯМ:

- в четырехпетлевом приближении в планарном пределе

- в трехпетлевом приближении в непланарном пределе

• С помощью полученных результатов найдено семейство решений, для которых однопетлевое условие сохраняется в четырехпетлевом приближении

• С помощью топологических соображений и цветовой структуры простейших диаграмм исследована конформная инвариантность этих решений в высших петлях