



---

# Некоторые вопросы квантовых аномалий

Пасечник Роман

Лаборатория Теоретической Физики  
им. Н.Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна

&

Физический Факультет,  
Московский Государственный Университет,  
Москва



# Обзор

---

?

классические симметрии  $\longrightarrow$  квантовые симметрии

Не существует общего принципа, позволяющего переносить классические симметрии на квантовый уровень

*Аномалии появляются, когда в квантовой теории имеет место нарушение некоторой классической симметрии*

обзоры:

S. Adler, "Anomalies to all orders" hep-th/0405040 and "Anomalies" hep-th/0411038



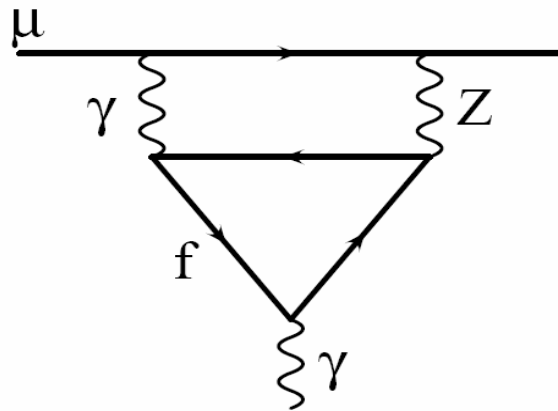
# Мой доклад включает:

---

- Одно из приложений *аксиальной аномалии*: *мюонный аномальный магнитный момент*
- Важные определения, касающиеся *аксиальной аномалии*
- Краткое описание *дисперсионного подхода* к аксиальной аномалии
- Теорема Вайнштейна *о неперенормируемости*: дисперсионная точка зрения
- Одно из приложений *трэйсовой аномалии*: *рождение хиггсовского бозона* в слиянии двух глюонов
- Вычисление *эффектов виртуальностей* на амплитуду и сечение.

# Мотивации и значение

- Существует класс электрослабых вкладов в мюонный аномальный магнитный момент ( $g-2$ ), содержащий *фермионную треугольную диаграмму* с виртуальным фотоном и Z бозоном

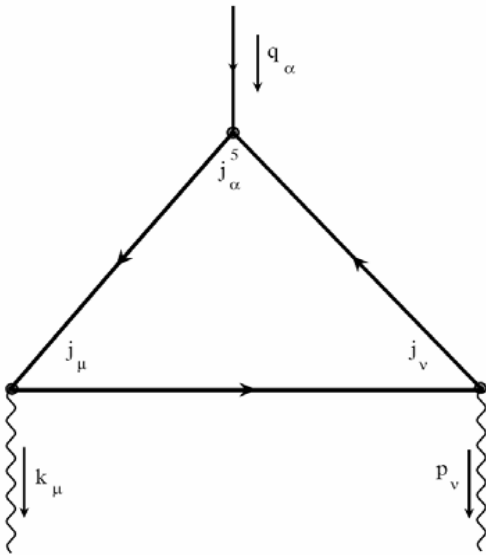


Effective  $Z\gamma\gamma^*$  coupling induced by a fermion triangle, contributing to  $a_\mu^{\text{EW}}$ .

- Для определения *мюонного аномального магнитного момента* мы заинтересованы в изучении перехода  $Z^* \rightarrow \gamma^*$  между виртуальными Z и  $\gamma$  в присутствии *слабого внешнего электромагнитного поля* с точностью до величин первого порядка по этому полю

# Аксиальная аномалия (АА): основные определения

АА имеет место только на  
однопетлевом уровне



Свойства симметрии

$$T_{\alpha\mu\nu}(k, p) = T_{\alpha\nu\mu}(p, k) \quad (*)$$

$$k^\mu T_{\alpha\mu\nu} = 0, \quad p^\nu T_{\alpha\mu\nu} = 0$$

AVV амплитуда

$$T_{\alpha\mu\nu} = - \int d^4x d^4y e^{ipx -iky} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu(y) j_\alpha^5(0) \} | 0 \rangle$$

Представление Розенберга

$$\begin{aligned} T_{\alpha\mu\nu}(k, p) = & \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho} k^\rho F_1 + \varepsilon_{\alpha\mu\nu\rho} p^\rho F_2 \\ & + k_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_3 + p_\nu \varepsilon_{\alpha\mu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_4 \\ & + k_\mu \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_5 + p_\mu \varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma F_6 \end{aligned}$$

Аномальное AV тождество Уорда

$$q^\alpha T_{\alpha\mu\nu}(k, p) = 2m T_{\mu\nu}(k, p) + \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma$$

$$T_{\mu\nu}(k, p) = G \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma$$

$$F_2 - F_1 = 2mG + \frac{1}{2\pi^2}$$

# Дисперсионный подход к аксиальной аномалии: краткий обзор

$$k^2 = 0, \quad q^2 > 4m^2, \quad p^2 < 4m^2$$

$$F_j(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_j(t)}{t - q^2} dt,$$
$$G(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{B(t)}{t - q^2} dt$$

Мнимые части удовлетворяют **неаномальному тождеству Уорда**:

$$(p^2 - t)A_3(t) - p^2 A_4(t) = 2mB(t)$$

Учитывая свойства симметрии, получаем:

$$F_2 - F_1 - 2mG = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} A_3(q^2; p^2, m^2) dq^2$$

Таким образом наличие аксиальной аномалии эквивалентно **«правилу сумм»**:

$$\int_{4m^2}^{\infty} A_3(q^2; p^2, m^2) dq^2 = \frac{1}{2\pi}$$

в одной петле:

$$A_3(q^2; p^2, m^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(q^2 - p^2)^2} \left( -p^2 R + 2m^2 \ln \frac{1 + R}{1 - R} \right), \quad R = \left( 1 - \frac{4m^2}{q^2} \right)^{1/2}$$

# Дисперсионный подход к аксиальной аномалии: краткий обзор

$$p^2 > 4m^2, \quad q^2 < 4m^2$$

Записывая дисперсионные соотношения без вычитаний по переменной  $p^2$  аналогичным способом получаем

$$F_2 - F_1 - 2mG = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} [A_4(p^2; q^2, m^2) - A_3(p^2; q^2, m^2)] dp^2$$

$$\int_{4m^2}^{\infty} [A_4(p^2; q^2, m^2) - A_3(p^2; q^2, m^2)] dp^2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$A_3(p^2; q^2, m^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(p^2 - q^2)^2} \left( p^2 S - 2m^2 \ln \frac{1 + S}{1 - S} \right),$$

$$A_4(p^2; q^2, m^2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p^2 - q^2} S, \quad S = \left( 1 - \frac{4m^2}{p^2} \right)^{1/2}$$

# Теорема Вайнштейна о неперенормируемости

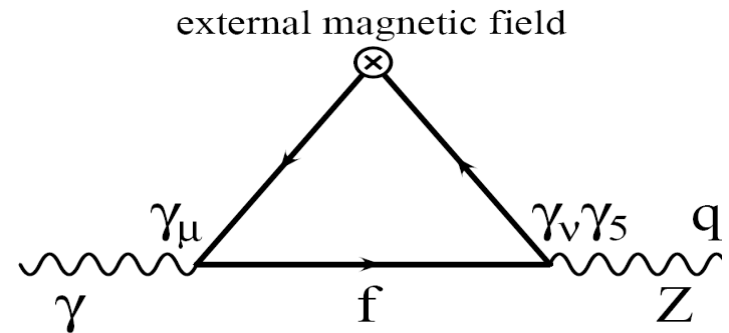
Пусть  $j_\nu$  источник мягких фотонов с вектором поляризации  $e^\nu(k)$  тогда

$$T_{\alpha\mu} = T_{\alpha\mu\nu} e^\nu(k) = w_T(p^2)(-p^2 \tilde{f}_{\mu\alpha} + p_\mu p^\rho \tilde{f}_{\rho\alpha} - p_\alpha p^\rho \tilde{f}_{\rho\mu}) + w_L(p^2) p_\alpha p^\rho \tilde{f}_{\rho\mu},$$

$$\tilde{f}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}, \quad f_{\mu\nu} = k_\mu e_\nu - k_\nu e_\mu$$

$$w_L = F_5, \quad w_T = F_5 + F_3$$

$$\Delta a_\mu = \frac{\alpha}{\pi} \frac{G_\mu m_\mu^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} \int_{m_\mu^2}^{\infty} dQ^2 \left( w_L + \frac{m_Z^2}{m_Z^2 + Q^2} w_T \right).$$



Известно, что *в киральном пределе на однопетлевом уровне*

$$w_L[m=0] = 2w_T[m=0] \quad \text{or} \quad -F_5[m=0] = 2F_3[m=0] \quad (**)$$

Существует *симметрия амплитуды* относительно  $\mu \leftrightarrow \alpha$  в киральном пределе

Как результат соотношения (\*\*), *не получают поправок* от глюонных обменов в высших порядках теории возмущений

Аномалия выражается *только через*  $w_L$  :  $q^\alpha T_{\alpha\mu} = -Q^2 w_L q^\sigma \tilde{f}_{\sigma\mu} \sim q^\sigma \tilde{f}_{\sigma\mu}$





# Теорема Вайнштейна: дисперсионная точка зрения

Мы имеем два дисперсионных соотношения для аномалии.  
Приравнивая их левые части и переставляя местами  $q^2$  и  $p^2$  имеем

$$A_4(q^2; p^2, m^2) = 2A_3(q^2; p^2, m^2) \quad (***)$$

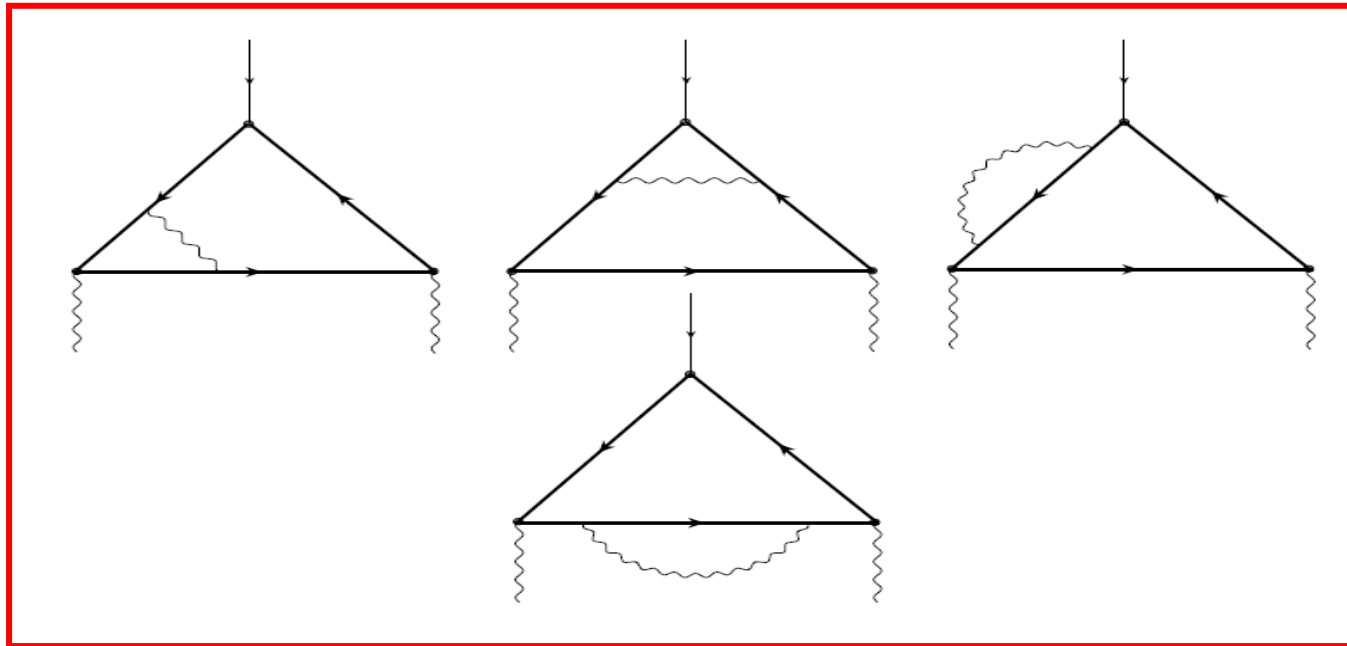
Совпадает с мнимой частью соотношения (\*\*\*) для реальных внешних фотонов в киральном пределе на однопетлевом уровне.

В отличие от подхода Вайнштейна в дисперсионном подходе мы имеем два дисперсионных соотношения для аксиальной аномалии, включающие обе структуры – поперечную и продольную

*Если полученное соотношение не получает пертурбативных поправок в высших порядках, то это обеспечит справедливость теоремы о неперенормируемости для поперечной части треугольной амплитуды при произвольных массах*

Чтобы проверить это, мы должны вычислить  $A_3$  хотя бы в двухпетлевом приближении

# Вычисление двухпетлевой аксиальной аномалии



Мы вычислили мнимую часть третьего формфактора соответствующего полной двухпетлевой амплитуде в обеих кинематиках.

Результат:  $A_3$  равен нулю!

- Постулируется справедливость дисперсионного подхода к аксиальной аномалии в высших порядках теории возмущений
- Тождество Уодра доказано на двухпетлевом уровне в двух кинематиках, соответствующих двум реальным фотонам и одному реальному, одному виртуальному
- Предложено расширить теорему о неперенормируемости Вайнштейна на случай произвольных масс фермионов в треугольной петле в рассмотренных кинематиках. Работа по проверке возможности такого расширения продолжается...

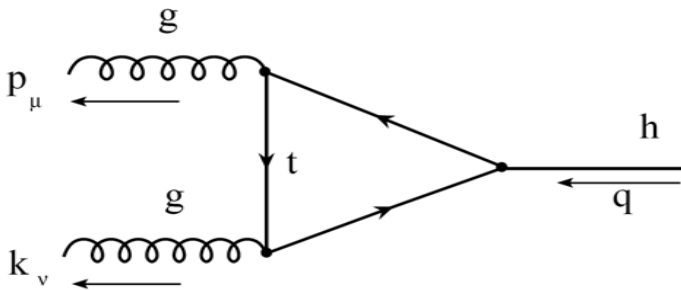
! Но: Kirill Melnikov, hep-ph/0604205



*Получены исчезающие двухпетлевые массовые поправки к  $AVV$  кореллятор, что противоречит нашему результату*

# Рождение хиггсовского бозона

Доминирующий механизм рождения на адронных коллайдерах –  
путем *слияния двух глюонов*  $pp \rightarrow gg \rightarrow H$



Амплитуда для реальных глюонов  
давно известна (эффективный подход):

$$T_{\mu\nu}(k, p)|_{k^2, p^2=0} = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{v} ([(kp)g_{\mu\nu} - k_\mu p_\nu] I_1 + p_\mu k_\nu I_2),$$

$$I_1 = \tau \left[ 1 - \frac{1}{4}(1 - \tau) \ln \left( \frac{\sqrt{1 - \tau} + 1}{\sqrt{1 - \tau} - 1} \right)^2 \right] \quad \text{for } \tau = \frac{4m_{top}^2}{m_h^2} > 1.$$

$$I_1|_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{2}{3}$$

Мы ставим следующие задачи:

- 1) Учесть *ненулевые виртуальности глюонов*  $p^2, k^2 \neq 0$  в амплитуде, включая конечные (не бесконечные) массы кварков в петле
- 2) Вычислить матричный элемент и инклюзивное сечение в рамках *подхода kt-факторизации*

# Слияние двух виртуальных глюонов

## Симметрия амплитуды

$$p^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad k^\nu T_{\mu\nu} = 0$$

$$T_{\mu\nu}(k, p) = T_{\nu\mu}(p, k)$$

## Формфакторы

$$G_1 = \frac{m_f^2}{(kp)((kp)^2 - k^2p^2)} \times \\ \times [(4m_f^2((kp)^2 - k^2p^2) - 2(kp)((kp)^2 - 2k^2p^2) + k^2p^2(k^2 + p^2))C_0 + \\ + k^2(p^2 + (kp))L_1 - (2k^2p^2 + (kp)(k^2 + p^2))L_2 + \\ + p^2(k^2 + (kp))L_3 + 2((kp)^2 - k^2p^2)],$$

$$C_0(q^2, k^2, p^2, m_f^2) = 16\pi^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n r}{i(2\pi)^4 [(r-k)^2 - m_f^2][r^2 - m_f^2][(r+p)^2 - m_f^2]} = \\ = \varkappa(k^2, p^2, q^2) + \varkappa(q^2, k^2, p^2) + \varkappa(p^2, q^2, k^2).$$

$$L_j = \beta_j \ln \frac{\beta_j + 1}{\beta_j - 1}, \quad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{k^2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{q^2}}, \quad \beta_3 = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{p^2}} \\ \xi = -\gamma - \ln \pi + 2 - \ln \frac{m_f^2}{\mu^2}$$

## Тензорное представление

$$T_{\mu\nu}(k, p) = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{v} \left( [(kp)g_{\mu\nu} - k_\mu p_\nu] G_1 + \right. \\ \left. + \left[ p_\mu k_\nu - \frac{p^2}{(kp)} k_\mu k_\nu - \frac{k^2}{(kp)} p_\mu p_\nu + \frac{k^2 p^2}{(kp)^2} k_\mu p_\nu \right] G_2 \right).$$

$$G_2 = -\frac{m_f^2(kp)}{((kp)^2 - k^2p^2)^2} \times \\ \times [(4m_f^2((kp)^2 - k^2p^2) + (k^2 + p^2)(2(kp)^2 + k^2p^2) + 2(kp)((kp)^2 + 2k^2p^2))C_0 + \\ + (2(kp)^2 + 3(kp)k^2 + k^2p^2)L_1 - (3(kp)(k^2 + p^2) + 2(2(kp)^2 + k^2p^2))L_2 + \\ + (2(kp)^2 + 3(kp)p^2 + k^2p^2)L_3 + 2((kp)^2 - k^2p^2)].$$

$$\varkappa(x, y, z) = \frac{1}{\lambda} \left[ \text{Li}_2 \left( \frac{t-1}{t-\tau} \right) + \text{Li}_2 \left( \frac{t-1}{t+\tau} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{t+1}{t-\tau} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{t+1}{t+\tau} \right) \right].$$

$$\lambda(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx}, \quad t = \frac{1}{\lambda}(x - y - z), \quad \tau = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{x}}$$

# Влияние глюонных виртуальностей

## Безразмерные параметры

$$\chi = \frac{q^2}{4m_f^2}, \quad \xi = \frac{p^2}{4m_f^2} < 0, \quad \eta = \frac{k^2}{4m_f^2} < 0.$$

## Разложения в пределе $\chi, \xi, \eta \rightarrow 0$

$$G_1(\chi, \xi, \eta) = \frac{2}{3} \left[ 1 + \frac{7}{30}\chi + \frac{2}{21}\chi^2 + \frac{11}{30}(\xi + \eta) + O(\chi^3, \xi^2, \eta^2, \chi\xi, \chi\eta, \xi\eta) \right],$$

$$G_2(\chi, \xi, \eta) = -\frac{1}{45}(\chi - \xi - \eta) - \frac{4}{315}\chi^2 + O(\chi^3, \xi^2, \eta^2, \chi\xi, \chi\eta, \xi\eta).$$

## Матричный элемент

$$M(g^* g^* \rightarrow H) = -i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{v} \left[ (m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}| \cos \phi) \cos \phi G_1 - \frac{2(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2 + 2|\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}| \cos \phi)^2 |\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}|}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2} G_2 \right],$$

$$T_{\mu\nu} k_{1\perp}^\mu k_{2\perp}^\nu / |\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}|$$

## Сечение

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{256\pi^2} \frac{(m_h^2 + \mathbf{p}_\perp^2)}{v^2 x_1 x_2 s m_h^2} \int \left[ \cos \phi G_1 - \frac{2(m_h^2 + \mathbf{p}_\perp^2) |\mathbf{k}_{1\perp}||\mathbf{k}_{2\perp}|}{(m_h^2 + \mathbf{k}_{1\perp}^2 + \mathbf{k}_{2\perp}^2)^2} G_2 \right]^2 \times \mathcal{A}(x_1, \mathbf{k}_{1\perp}^2, \mu^2) \mathcal{A}(x_2, \mathbf{k}_{2\perp}^2, \mu^2) d\mathbf{k}_{1\perp}^2 d\mathbf{k}_{2\perp}^2 dy_H,$$

## Влияние: *на матричный элемент*

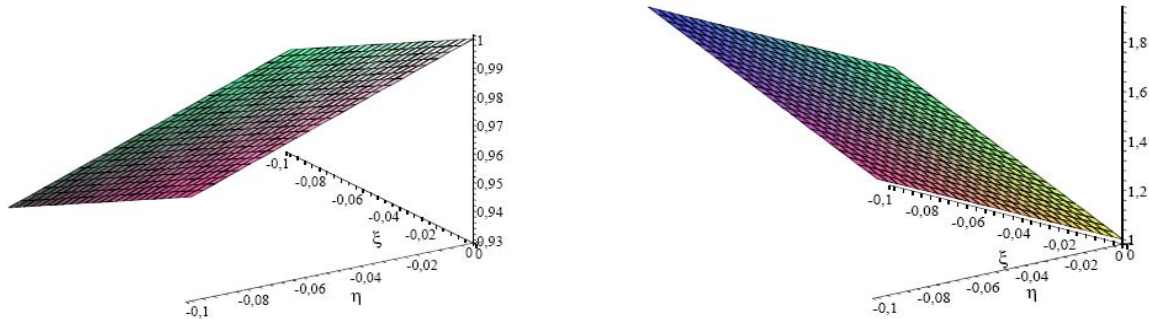
$$\frac{\langle M_0^2 \rangle_\phi - \langle M^2 \rangle_\phi}{\langle M_0^2 \rangle_\phi} \simeq \frac{(G_1^0)^2 - G_1^2}{(G_1^0)^2} = 0.0003 - 0.03$$

## *на угловое распределение*

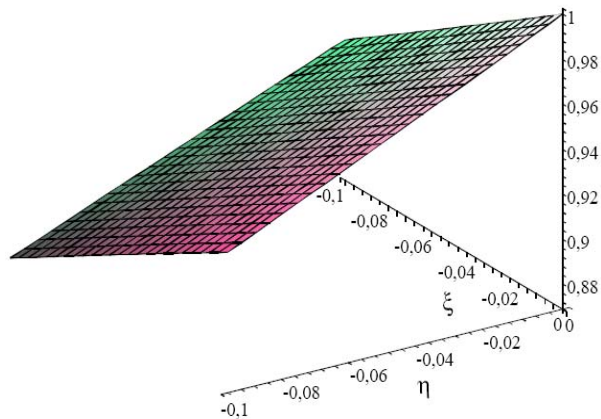
$$\frac{M^2|_{\phi=\pi/2} - M_0^2|_{\phi=\pi/2}}{M_0^2|_{\phi=\pi/2}} \simeq \frac{G_2^2 - G_2^{02}}{G_2^{02}} = 0.004 - 0.44$$

$$|\mathbf{k}_{1,2\perp}| \sim 5 - 50 \text{ GeV}.$$

# Влияние глюонных виртуальностей



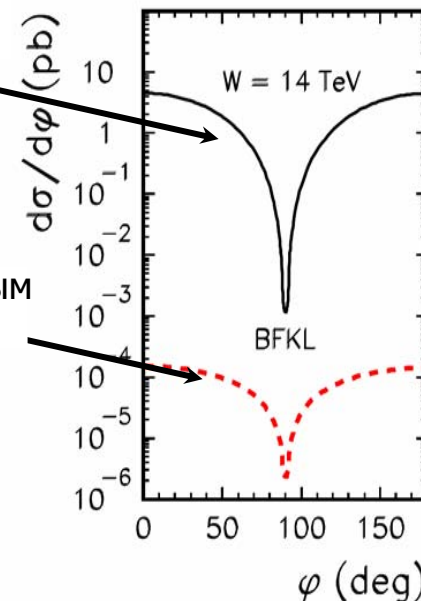
Off-shell form factors  $G_1$  (left) and  $G_2$  (right) normalized to their on-shell values



Averaged square of off-shell matrix element  $\langle M^2 \rangle_\phi$  normalized to its on-shell value  $\langle M_0^2 \rangle_\phi$

с полной амплитудой

с интерференционным членом



Azimuthal angle distribution of the cross section  $-2 < y_H < 2$ .

- Мы проанализировали влияние ненулевых виртуальностей внешних глюонов на амплитуду рождения скалярного хиггсовского бозона. Мы нашли новый член в амплитуде в сравнении с результатом эффективного подхода.
- Относительное падение усредненного квадрата матричного элемента около 1% или меньше при значимых для эксперимента физических параметрах, так что этот эффект может быть обнаружен только в высокоточных экспериментах.
- Эффект ненулевых виртуальностей на угловое распределение существенно более значителен, вследствие быстрого роста второго формфактора.